Twierdzenia Sobolewa i Rellicha-Kondraszowa

Twierdzenie Sobolewa o włożeniu. Jeśli $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ jest dostatecznie regularnym obszarem oraz $1 \leqslant p < n$, to

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leqslant C(\Omega, p)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \text{dla } u \in W^{1,p}(\Omega),$$

gdzie $p^* = \frac{np}{n-p}$.

Twierdzenie Rellicha-Kondraszowa. Jeśli $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ jest dostatecznie regularnym obszarem ograniczonym oraz $1 \leqslant p < \infty$, to włożenie $W^{1,p}(\Omega)$ w $L^1(\Omega)$ jest zwarte. Innymi słowy, z każdego ograniczonego ciągu $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$ można wybrać podciąg zbieżny w $L^1(\Omega)$.

Zadanie 1. Pokazać, że dla $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ zachodzi

$$|u(x)| \leqslant C(n) \left(r^{-n} \int_{\mathbf{B}_r(x)} |u(y)| \,\mathrm{d}y + \int_{\mathbf{B}_r(x)} |\nabla u(y)||x-y|^{1-n} \,\mathrm{d}y \right)$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{T}^n$ i $0 < r < 1$.

Zadanie 2. Pokazać, że dla $u \in W^{1,n}(\mathbb{T}^n)$ i $n \leqslant q < \infty$ zachodzi

$$\|u\|_{L^q} \leqslant C(n,q)\|u\|_{L^n}^{1-\frac{n}{q}} \|\nabla u\|_{L^n}^{\frac{n}{q}}.$$

Uwagi. Nierówność Höldera daje nierówność z $\|u\|_{L^\infty}$ w miejsce $\|\nabla u\|_{L^n}$, co jest istotnie słabsze. Żeby nie ugrzęznąć w obliczeniach, można się ograniczyć do przypadku $q = 2n$.
Wskazówka. Przedstawić oszacowanie z poprzedniego zadania w formie splotowej i zastosować nierówność Younga.

Zadanie 3. (twierdzenie Sobolewa w drugą stronę) Pokazać, że jeśli nierówność

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^q \,\mathrm{d}x \right)^{1/q} \leqslant C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p \right)^{1/p}$$

zachodzi dla każdej funkcji $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, to $q = p^* = \frac{np}{n-p}$.
Wskazówka. Rozważyć rodzinę funkcji $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$.

Zadanie 4. Twierdzenie Rellicha-Kondraszowa zakłada ograniczoność Ω. Pokazać, że jeśli Ω zawiera pewną nieskończoną rodzinę rozłącznych kul o tym samym promieniu, to teza twierdzenia nie zachodzi.

Zadanie 5. Przy założeniach twierdzeń Sobolewa i Rellicha-Kondraszowa wykazać, że włożenie $W^{1,p}(\Omega)$ w $L^q(\Omega)$ jest zwarte dla każdego $1 \leqslant q < p^*$.
Wskazówka. Zastosować nierówność interpolacyjną, czyli oszacować normę L^q przez normy L^1 i L^{p^*}

Zadanie 6. Przy założeniach j.w. pokazać, że dla dowolnego ograniczonego ciągu $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$ istnieje $u \in W^{1,p}(\Omega)$ takie, że

$$\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u \text{ w } L^p, \qquad u_k \to u \text{ w } L^q \text{ dla każdego } 1 \leqslant q < p^*.$$

Zadanie 7. Przy założeniach j.w. wykazać następującą wersję nierówności Poincarégo:

$$\int_\Omega |u - u_\Omega|^p \lesssim \int_\Omega |\nabla u|^p \quad \text{dla } u \in W^{1,p}(\Omega),$$

gdzie $u_\Omega = \fint_\Omega u$ jest wartością średnią.
Wskazówka. Rozumować przez sprzeczność. Można przyjąć, że ciąg u_k przeczący tezie spełnia $\int u_k = 0$ oraz $\int |u_k|^p = 1$.

Zadanie 8. Wykazać dwie inne wersje nierówności Poincarégo:

a) $\int_\Omega |u|^p \lesssim \int_\Omega |\nabla u|^p$ dla $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

b) $\int_\Omega |u|^p \lesssim \int_\Omega |\nabla u|^p$ dla $u \in W^{1,p}(\Omega)$ zerujących się na zbiorze $A \subseteq \Omega$ dodatniej miary (stała ma prawo zależeć od $|A|$).

Zadanie 9. Wykazać twierdzenie Morreya w wymiarze $n = 1$: jeśli $u \in W^{1,p}((0,1))$ i $p > 1$, to u posiada reprezentanta spełniającego

$$|u(x) - u(y)| \leqslant |x - y|^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |u'|^p \right)^{1/p}.$$

Zadanie 10. Korzystając z twierdzenia Campanato, wykazać następującą wersję twierdzenia Morreya. Jeśli $u \in W^{1,n}(\mathbf{B}_1^n)$ spełnia warunek

$$\int_{\mathbf{B}_r(x)} |\nabla u|^n \leqslant C r^{n\alpha} \qquad \text{dla wszystkich kul } \mathbf{B}_r(x) \subseteq \mathbf{B}_1,$$

to u ma reprezentanta w $C^\alpha(\mathbf{B}_1)$.